

CHƯƠNG

II

VECTƠ
TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTO



IV HỆ THỐNG BÀI TẬP CÂU HỎI 4 MỆNH ĐỀ TRẢ LỜI ĐÚNG/SAI.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Với các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ tùy ý khác vectơ không.

a) $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + 2\vec{b} \cdot \vec{c}$.

b) $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = 2\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{c}$.

c) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$.

d) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Lời giải

a) **Đúng:** Tích vô hướng có tính chất phân phối đối với phép cộng.

b) **Đúng:** Tích vô hướng có tính chất phân phối đối với phép cộng.

c) **Sai.** Chọn $\vec{a} = (1; 1; 0)$, $\vec{b} = (0; 1; 1)$, $\vec{c} = (1; 0; 1)$.

Khi đó $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \Rightarrow (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = (1; 0; 1)$ và $\vec{b} \cdot \vec{c} = 1 \Rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) = (1; 1; 0)$.

Suy ra : $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} \neq \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$

d) **Đúng:** Từ định nghĩa của tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$, ta suy ra $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

Câu 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho $A(0; -1; 1)$, $B(-2; 1; -1)$, $C(-1; 3; 2)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) $\overrightarrow{AB} = (-2; 2; 0)$.

b) ABCD là hình bình hành khi $D(1; 1; 4)$.

c) $I(-1; 0; 0)$ là tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB.

d) Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$

Lời giải

a) $\overrightarrow{AB} = (-2; 2; -2)$

b) Gọi $D(x; y; z)$, ta có $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=2 \\ y-3=-2 \\ z-2=2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=4 \end{cases}$. Vậy $D(1; 1; 4)$.

c) $\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{0-2}{2} = -1 \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0 \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{1-1}{2} = 0 \end{cases}$ Nên $I(-1; 0; 0)$.

d) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2; 2; -2)$
 $\overrightarrow{AC} = (-1; 4; 1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 + 8 - 2 = 8$.

a) Sai: $\overrightarrow{AB} = (-2; 2; -2)$

b) Đúng: $ABCD$ là hình bình hành khi $D(1; 1; 4)$.

c) Đúng: $I(-1; 0; 0)$.

d) Sai: Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 8$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vector $\vec{a} = (2; 1; 0)$ và $\vec{b} = (-1; 0; -2)$. $\vec{c} = (1; 7; 2)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) $2\vec{a} = (4; 2; 0)$.

b) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{5}$.

c) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = (0; -6; -4)$.

d) $\vec{a}$ cùng phương $\vec{c}$.

Lời giải

a) $2\vec{a} = 2(2; 1; 0) = (4; 2; 0)$

$$b) \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-2)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 2^2}} = \frac{-2}{5}.$$

$$c) \vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = (0; -6; -4)$$

$$d) \text{Ta có } \frac{2}{1} \neq \frac{1}{7} \neq \frac{0}{2},$$

$\vec{a}$ không cùng phương $\vec{c}$

$$a) \text{Đúng: } 2\vec{a} = (4; 2; 0)$$

$$b) \text{Sai: } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{-2}{5}$$

$$c) \text{Đúng: } \vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = (0; -6; -4)$$

$$d) \text{Sai: } \vec{a} \text{ không cùng phương } \vec{c}.$$

Câu 4: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(1; -1; 2)$ và $B(-1; 3; 0)$.

$$a) \text{Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng } (0; 1; 1).$$

$$b) \text{Tọa độ vector } \overrightarrow{AB} = (2; -4; 2).$$

$$c) \text{Tọa độ vector } \overrightarrow{OA} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}.$$

$$d) \text{Tọa độ vector } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (-2; 4; -2)$$

Lời giải

$$a) \text{Đúng. Vì } \begin{cases} x_0 = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1-1}{2} = 0 \\ y_0 = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1. \text{ Vậy tọa độ trung điểm là } (0; 1; 1). \\ z_0 = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{2+0}{2} = 1 \end{cases}$$

$$b) \text{Sai. Vì } \overrightarrow{AB} = (-2; 4; -2).$$

$$c) \text{Sai. Vì } \overrightarrow{OA} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}.$$

$$d) \text{Sai. Vì } \begin{cases} \overrightarrow{OA} = (1; -1; 2) \\ \overrightarrow{OB} = (-1; 3; 0) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (0; 4; -2) \neq (-2; 4; -2)$$

Câu 5: Trong không gian Oxyz, cho $\vec{a} = (2; 3; 2)$ và $\vec{b} = (1; 1; -1)$.

$$a) \text{Tọa độ vector } \vec{a} - \vec{b} = (1; 2; 3).$$

$$b) \text{Tích vô hướng của hai vector } \vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ bằng 6.}$$

$$c) \text{Hai vector } \vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ không cùng phương.}$$

D. Cosin góc giữa vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $\frac{\sqrt{51}}{51}$

Lời giải

a) Đúng. Vì $\vec{a} - \vec{b} = (2 - 1; 3 - 1; 2 - (-1)) = (1; 2; 3)$.

b) Sai. Vì $\vec{a}\vec{b} = 2.1 + 3.1 - 2.1 = 3$

c) Đúng. Vì $\frac{2}{1} \neq \frac{3}{1} \neq \frac{2}{-1}$.

d) Sai. Vì $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{2.1 + 3.1 - 2.1}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{51}}$

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho hai véctor $\vec{a} = (-2; 1; -3)$, $\vec{b} = (-1; -3; 2)$ và điểm $A(4; 6; -3)$.

a) Tọa độ vector $\vec{a} - 2\vec{b} = (0; 1; -1)$.

b) Tọa độ điểm $B(2; 7; -6)$ thì $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.

c) Hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương hướng.

d) Góc giữa vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 120° .

Lời giải

a) Sai. Vì $\vec{a} - 2\vec{b} = (0; 7; -7)$.

b) Đúng. Vì $\vec{a} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = x_B - 4 \\ 1 = y_B - 6 \\ -3 = z_B + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 2 \\ y_B = 7 \\ z_B = -6 \end{cases} \Rightarrow B(2; 7; -6)$.

c) Sai. Vì $\frac{-2}{-1} \neq \frac{1}{-3} \neq \frac{-3}{2}$.

d) Đúng. Vì $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{-2.(-1) + (-3).1 + (-3).2}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vector $\vec{a} = (-1; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$, $\vec{c} = (1; 1; 1)$.

a) Độ dài vector $\vec{a}$ bằng $\sqrt{2}$.

b) Vector $\vec{b}$ vuông góc với $\vec{a}$.

c) Vector $\vec{b}$ vuông góc với $\vec{c}$.

d) Tọa độ vector $3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$ bằng $(-2; 4; -1)$.

Lời giải

a) Đúng. Vì $|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0} = \sqrt{2}$.

b) Đúng. Vì $\vec{a}\vec{b} = (-1).1 + 1.1 + 0 = 0$

c) Sai. Vì $\vec{b}\vec{c} = 1.1 + 1.1 + 0.1 = 2$.

d) Đúng. Vì $3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c} = (-2; 4; -1)$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(4; 2; 1)$, $B(2; 1; 3)$, $C(-1; 3; -2)$.

a) Tọa độ trọng tâm tam giác ABC bằng $\left(\frac{5}{3}; 2; \frac{2}{3}\right)$.

b) Tọa độ trung điểm đoạn thẳng AB bằng $\left(3; \frac{3}{2}; 2\right)$

c) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì tọa độ điểm $D = (1; 4; -4)$.

d) Ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Lời giải

a) Đúng. Tọa độ trọng tâm tam giác ABC $\left(\frac{4+2-1}{3}; \frac{2+1+3}{3}; \frac{1+3-2}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}; 2; \frac{2}{3}\right)$.

b) Đúng. Tọa độ trung điểm đoạn thẳng AB $\left(\frac{4+2}{2}; \frac{2+1}{2}; \frac{1+3}{2}\right) = \left(3; \frac{3}{2}; 2\right)$.

c) Đúng. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-4 = -1-x_D \\ 1-2 = 3-y_D \\ 3-1 = -2-z_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 1 \\ y_D = 4 \\ z_D = -4 \end{cases} \Rightarrow D(1; 4; -4).$$

d) Sai. Vì $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-2; -1; 2) \\ \overrightarrow{AC} = (-5; 1; -3) \end{cases}$. Ta có: $\frac{-2}{-5} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{2}{-3} \Rightarrow A, B, C$ không thẳng hàng.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; 5; -1)$, $B(7; x; 1)$, $C(9; 2; y)$.

a) Ba điểm A, B, C thẳng hàng thì $x + y = 5$.

b) Điểm $G\left(\frac{19}{3}; \frac{8}{3}; 3\right)$ là trọng tâm tam giác ABC thì $x = 1; y = 3$.

c) Tam giác ABC vuông tại A thì $x = 13; y = -1$.

d) Tích vô hướng của $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -3x + 2y + 41$.

Lời giải

a) Đúng.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (4; x-5; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (6; -3; y+1)$

$$\text{Để ba điểm } A, B, C \text{ thẳng hàng } \vec{AB} = k \cdot \vec{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = k \cdot 6 \\ x - 5 = k(-3) \\ 2 = k(y + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{2}{3} \\ x = 3 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Vậy $x + y = 5$.

$$\text{b) Sai. Ta có: } \begin{cases} \frac{3+7+9}{3} = \frac{19}{3} \\ \frac{5+x+2}{3} = \frac{8}{3} \\ \frac{-1+1+y}{3} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 9 \end{cases}.$$

c) Đúng.

Ta có: $\vec{AB} = (4; x-5; 2)$, $\vec{AC} = (6; -3; y+1)$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 24 + (x-5)(-3) + 2(y+1)$$

$$\text{Với } \begin{cases} x = 13 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$$

d) Đúng. Vì $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 24 + (x-5)(-3) + 2(y+1) = -3x + 2y + 41$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vector $\vec{a} = (1; 2; 3)$; $\vec{b} = (2; 2; -1)$, $\vec{c} = (4; 0; -4)$.

a) $3\vec{a} = (1; 6; 9)$.

b) $\vec{a} + \vec{b} = (3; 4; 2)$.

c) $\vec{a} - \vec{c} = (3; -2; -7)$.

d) $\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c} = (7; 0; -4)$.

Lời giải

a) Sai. Vì $3\vec{a} = 3(1; 2; 3) = (3; 6; 9)$

b) Đúng. Vì $\vec{a} + \vec{b} = (1+2; 2+2; 3-1) = (3; 4; 2)$.

c) Sai. Vì $\vec{a} - \vec{c} = (1-4; 2-0; 3+4) = (-3; 2; 7)$.

d) Đúng. Vì $\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c} = (1-2+2 \cdot 4; 2-2+2 \cdot 0; 3-(-1)+2 \cdot (-4)) = (7; 0; -4)$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$; $\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$.

a) Tọa độ vector $\vec{a} = (-1; 3; 4)$.

b) Cosin góc giữa hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ bằng $\frac{1}{2}$.

c) Tích vô hướng của hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ bằng 14.

d) Hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ vuông góc với nhau.

Lời giải

a) Đúng. Dựa theo định nghĩa suy ra $\vec{a} = (-1; 3; 4)$.

b) Sai. Vì $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{-1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 4^2} \cdot \sqrt{2^2 + 4^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{546}}{39}$.

c) Đúng. Vì $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 = 14$.

d) Sai. Vì tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ khác 0.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (2; 1; -2)$, $\vec{b} = (1; 2; -4)$, $\vec{c} = (-1; -3; 3)$.

a) $\vec{a} = 2\vec{b}$.

b) $|\vec{a}| = 3|\vec{b}|$.

c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$

d) $2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c} = (-4; -19; 23)$.

Lời giải

a) Sai. Vì $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng hướng.

b) Sai. Vì $\begin{cases} |\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3 \\ |\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{21} \end{cases} \Rightarrow |\vec{a}| = \frac{3\sqrt{21}}{21} |\vec{b}|$

c) Đúng. Vì $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-4) = 12$.

d) Đúng.

Ta có $2\vec{a} = (4; 2; -4)$, $-3\vec{b} = (-3; -6; 12)$, $5\vec{c} = (-5; -15; 15)$

Vậy $2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c} = (-4; -19; 23)$.

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, cho bốn vectơ $\vec{a} = (2; 3; 1)$, $\vec{b} = (-1; 5; 2)$, $\vec{c} = (4; -1; 3)$ và $\vec{x} = (-3; 22; 5)$.

a) $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$.

b) Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

c) Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{c}$ không cùng phương.

d) Hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ vuông góc với nhau.

Lời giải

a) Đúng.

$$\text{Đặt } \vec{x} = m \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{b} + p \cdot \vec{c} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - n + 4p = -3 \\ 3m + 5n - p = 22 \\ m + 2n + 3p = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 3 \\ p = -1 \end{cases}.$$

Vậy $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$.

b) Sai. Vì $\frac{2}{-1} = \frac{3}{5} = \frac{1}{2}$.

c) Đúng. Vì $\frac{2}{-1} \neq \frac{3}{5} \neq \frac{1}{2}$.

d) Sai. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 2 = 15$

Câu 14: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$.

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{3}$.

b) $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{19}$.

c) $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$

d) $|\vec{a} - 2\vec{b}| = 28$.

Lời giải

a) Sai. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = 3$

b) Đúng. $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$

$$= \vec{a}^2 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) + \vec{b}^2$$

$$= 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ + 3^2 = 19$$

$$\Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{19}.$$

c) Sai. $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$

$$= \vec{a}^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) + \vec{b}^2$$

$$= 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ + 3^2 = 7$$

$$\Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{7}.$$

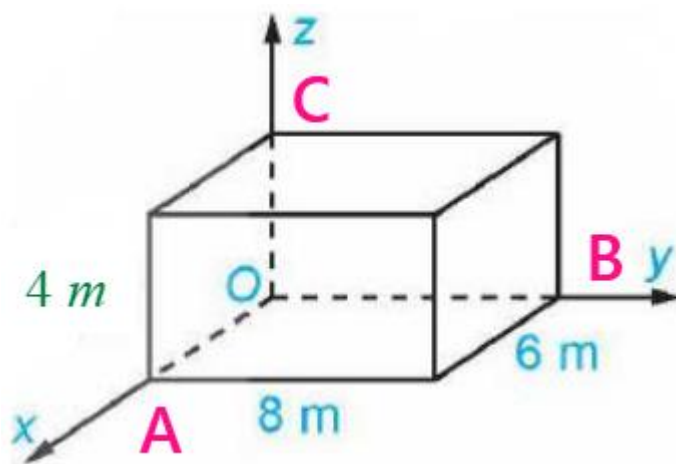
d) Sai. $|\vec{a} - 2\vec{b}|^2 = \vec{a}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^2$

$$= \vec{a}^2 - 4|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) + 4\vec{b}^2$$

$$= 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ + 4 \cdot 3^2 = 28$$

$$\Rightarrow |\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{28}.$$

Câu 15: Một phòng học có thiết kế dạng hình chữ nhật với chiều dài $8m$; chiều rộng $6m$ và chiều cao $4m$. Một chiếc đèn được treo tại chính giữa trần nhà của phòng học. Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với một góc phòng và mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sàn (như hình vẽ), đơn vị đo được lấy theo mét.



a) $A \in Ox \Rightarrow A(8;0;0)$.

b) $B \in Oy \Rightarrow B(0;6;0)$.

c) $C \in Oz \Rightarrow C(0;0;4)$.

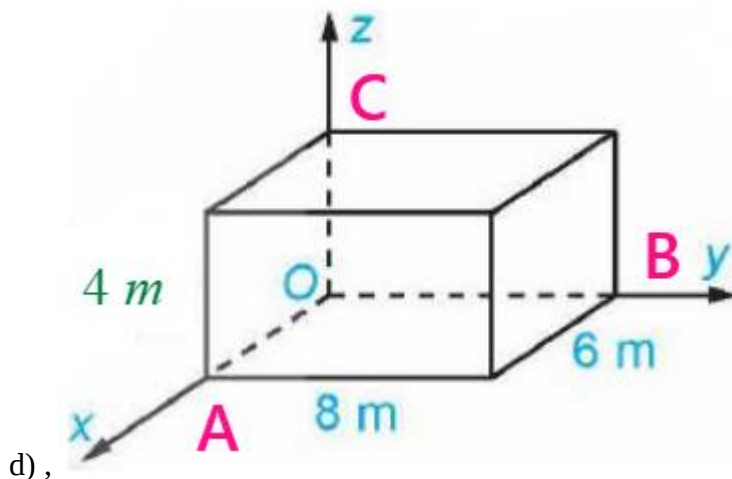
d) Tọa độ của điểm treo đèn có tọa độ $(4;3;1)$.

Lời giải

a) $A \in Ox \Rightarrow A(8;0;0)$

b) $B \in Oy \Rightarrow B(0;6;0)$

c) $C \in Oz \Rightarrow C(0;0;4)$



d),

$$F(6; 8; 4).$$

Vị trí treo đèn là trung điểm K của CF và $K(3; 4; 4)$

a) Sai: $A \in Ox \Rightarrow A(6; 0; 0)$

b) Sai: $B \in Oy \Rightarrow B(0; 8; 0)$

c) Sai: $C \in Oz \Rightarrow C(0; 0; 4)$

d) Sai: Tọa độ của điểm treo đèn có tọa độ $K(3; 4; 4)$

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho các vector $\vec{a} = (-1; 0; 3)$ và $\vec{b} = (2; 2; 5)$.

a) $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 23$.

b) $|\vec{a}| = 10$.

c) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{13\sqrt{330}}{330}$.

d) $|2\vec{a} + 3\vec{b}| = \sqrt{493}$.

Lời giải

a) **Đúng**

Ta có $\vec{a} + \vec{b} = (1; 2; 8)$. Suy ra $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 3 \cdot 8 = 23$.

b) **Sai.** $|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{10}$.

c) **Đúng:** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{-1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 3 \cdot 5}{\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 3^2} \cdot \sqrt{2^2 + 2^2 + 5^2}} = \frac{13}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{33}} = \frac{13\sqrt{330}}{330}$.

d) **Đúng.** $2\vec{a} = (-2; 0; 6)$

$3\vec{b} = (6; 6; 15)$

$\Rightarrow 2\vec{a} + 3\vec{b} = (4; 6; 21) \Rightarrow |2\vec{a} + 3\vec{b}| = \sqrt{4^2 + 6^2 + 21^2} = \sqrt{493}$.

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 0)$, $B(3; 0; 0)$, $D(0; 3; 0)$, $D'(0; 3; -3)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) $\overrightarrow{AB} = (0; 0; 3)$.

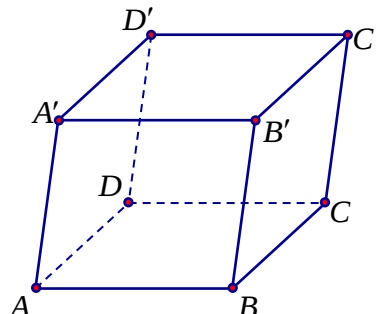
b) Tọa độ trọng tâm tam giác ABC là $G(1, -1, 0)$.

c) Tọa độ điểm C là $C(3, 3, 0)$.

d) Tọa độ trọng tâm tam giác $A'B'C$ là $K(2, -1, 2)$.

Lời giải

- a) Sai.
b) Sai.
c) Đúng.
d) Sai.



Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; 0; 0)$. Gọi $C(x; y; z) \Rightarrow \overrightarrow{DC} = (x; y-3; z)$

$ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow (x; y-3; z) = (3; 0; 0) \Rightarrow C(3; 3; 0)$

Ta có $\overrightarrow{AD} = (0; 3; 0)$. Gọi $A'(x'; y'; z') \Rightarrow \overrightarrow{A'D'} = (-x'; 3-y'; -3-z')$

$ADD'A'$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A'D'} \Rightarrow (0; 3; 0) = (-x'; 3-y'; -3-z') \Rightarrow A'(0; 0; -3)$

Gọi $B'(x_0; y_0; z_0) \Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = (x_0; y_0; z_0+3)$

$ABB'A'$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \Rightarrow (x_0; y_0; z_0+3) = (3; 0; 0) \Rightarrow B'(3; 0; -3)$

$$G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{0+3+3}{3} = 2 \\ y_G = \frac{0+0+3}{3} = 1 \\ z_G = \frac{0+0+0}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow G(2; 1; 0).$$

$$K \text{ là trọng tâm tam giác } A'B'C \Rightarrow \begin{cases} x_K = \frac{0+3+3}{3} = 2 \\ y_K = \frac{0+0+3}{3} = 1 \\ z_K = \frac{-3-3+0}{3} = -2 \end{cases} \Rightarrow K(2; 1; -2).$$

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ biết $A(2; 3; 2)$, $B(6; -1; -2)$, $C(-1; -4; 3)$, $D(1; 6; -5)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) $\overrightarrow{AB} = (1; -1; -1)$.
b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -4$.

c) Tổng chu vi các mặt của tứ diện gần bằng 106,95.

d) Tọa độ điểm M trên CD sao cho tam giác AMB có chu vi nhỏ nhất là $M(0;1;-1)$.

Lời giải

a) Sai.

b) Sai.

c) Đúng.

d) Đúng.

$$\overrightarrow{AB} = (4; -4; -4) \quad \overrightarrow{AC} = (-3; -7; 1)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \cdot (-3) - 4 \cdot (-7) - 4 \cdot 1 = -12 + 28 - 4 = 12$$

Có $AB = 4\sqrt{3}$, $BC = BD = \sqrt{83}$, $AC = AD = \sqrt{59}$, $CD = 2\sqrt{42}$ nên tổng chu vi gần bằng 106,95

Gọi tọa độ điểm $M(x; y; z)$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (4; -4; -4), \quad \overrightarrow{CD} = (2; 10; -8), \quad \overrightarrow{CM} = (x+1; y+4; z-3)$$

Do AB có độ dài không đổi, nên chu vi của tam giác AMB nhỏ nhất khi và chỉ khi $AM + MB$ đạt nhỏ nhất.

$$\text{Vì } M \text{ trên } CD \Rightarrow \overrightarrow{CM} = k\overrightarrow{CD} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + 2k \\ y = -4 + 10k \\ z = 3 - 8k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow M(-1 + 2k; -4 + 10k; 3 - 8k) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (-3 + 2k; -7 + 10k; 1 - 8k)$$

$$\overrightarrow{BM} = (2k - 7; -3 + 10k; 5 - 8k)$$

$$\text{suy ra } AM + BM = \sqrt{168k^2 - 168k + 59} + \sqrt{168k^2 - 168k + 83}$$

$$= \sqrt{168\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + 17} + \sqrt{168\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + 41} \geq \sqrt{17} + \sqrt{41}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $k = \frac{1}{2}$.

$$\text{Vậy } \begin{cases} x = -1 + 2k = 0 \\ y = -4 + 10k = 1 \\ z = 3 - 8k = -1 \end{cases} \Rightarrow M(0; 1; -1)$$

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho $S(1; 2; 3)$ và các điểm A, B, C thuộc các trục Ox, Oy, Oz sao cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Tam giác ABC là tam giác vuông.

b) $\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC} = 0$.

c) Tọa độ điểm C là $C(7, 0, 0)$.

d) Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{343}{36}$.

Lời giải

a) Sai.

b) Đúng.

c) Sai.

d) Đúng.

Ta đặt $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$.

$$\overrightarrow{SA} = (a-1; -2; -3); \overrightarrow{SB} = (-1; b-2; -3); \overrightarrow{SC} = (-1; -2; c-3).$$

Vì SA , SB , SC đôi một vuông góc nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{SA} \perp \overrightarrow{SB} \\ \overrightarrow{SB} \perp \overrightarrow{SC} \\ \overrightarrow{SA} \perp \overrightarrow{SC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = 0 \\ \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC} = 0 \\ \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=14 \\ 2b+3c=14 \\ a+3c=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=7 \\ b=\frac{7}{2} \\ c=\frac{7}{3} \end{cases}.$$

Do SA , SB , SC đôi một vuông góc, nên: $V_{SABC} = \frac{1}{6} SA \cdot SB \cdot SC = \frac{1}{6} \cdot 7 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{3} = \frac{343}{36}$.

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$, $B(3; 0; 8)$, $D(-5; -4; 0)$.

a) Tâm I hình vuông $ABCD$ có tọa độ là $I(-1; -2; -4)$.

b) Biết $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = (a; b; c)$. Suy ra $a + b - c$ bằng -4 .

c) Diện tích của hình vuông $ABCD$ bằng 144 (đơn vị diện tích).

d) Biết đỉnh $A(m; n; 0)$ với $m; n \in \mathbb{Q}$. Khi đó $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}|$ bằng $6\sqrt{10}$.

Lời giải

a) Sai:

Ta có tâm I hình vuông $ABCD$ là trung điểm của đoạn BD nên có tọa độ là $I(-1; -2; 4)$.

b) Đúng:

Theo quy tắc hình bình hành suy ra $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} = (-8; -4; -8) \Rightarrow a = -8; b = -4; c = -8$.

Do đó $a + b - c = (-8) + (-4) - (-8) = -4$.

c) Sai:

Ta có $BD=12$ và $ABCD$ là hình vuông nên $S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{1}{2} BD^2 = \frac{1}{2} \cdot 12^2 = 72$.

d) Đúng:

Ta có trung điểm BD là $I(-1; -2; 4)$, $BD=12$ và điểm $A(m; n; 0)$.

$$\begin{aligned} \text{Do } ABCD \text{ là hình vuông} &\Rightarrow \begin{cases} AB^2 = AD^2 \\ AI^2 = \left(\frac{1}{2} BD\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-3)^2 + n^2 + 8^2 = (m+5)^2 + (n+4)^2 \\ (m+1)^2 + (n+2)^2 + 4^2 = 36 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} n = 4 - 2m \\ (m+1)^2 + (6-2m)^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} m = \frac{17}{5} \\ n = \frac{-14}{5} \end{cases} \Rightarrow A(1; 2; 0) \text{ hoặc } A\left(\frac{17}{5}; \frac{-14}{5}; 0\right) \end{aligned}$$

(loại). Với $A(1; 2; 0) \Rightarrow C(-3; -6; 8)$.

Suy ra $\overrightarrow{CA} = (4; 8; -8)$, $\overrightarrow{CB} = (6; 6; 0) \Rightarrow \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = (10; 14; -8)$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}| = \sqrt{10^2 + 14^2 + (-8)^2} = 6\sqrt{10}.$$

Câu 21: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC , biết $A(5; 3; -1)$, $B(2; 3; -4)$, $C(3; 1; -2)$

a) Trung điểm của đoạn AB là $I\left(\frac{7}{2}; 3; \frac{-5}{2}\right)$.

b) Tam giác ABC vuông cân tại C .

c) Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

d) Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng $9 + 2\sqrt{6}$.

Lời giải

a) Đúng:

Trung điểm của đoạn AB là $I\left(\frac{7}{2}; 3; \frac{-5}{2}\right)$.

b) Đúng:

Ta có

$$\overrightarrow{AB} = (-3; 0; -3) \Rightarrow AB = 3\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{AC} = (-2; -2; -1) \Rightarrow AC = 3$$

$$\overrightarrow{BC} = (1; -2; 2) \Rightarrow BC = 3$$

Suy ra $AC = BC = 3$ và $AC^2 + BC^2 = AB^2$ nên tam giác ABC vuông cân tại C .

c) Đúng:

Vì tam giác ABC vuông cân tại C nên bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là

$$R = \frac{AB}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

d) Sai:

Do tam giác ABC vuông cân tại C nên suy ra bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC là

$$r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{\frac{1}{2}CACB}{\frac{1}{2}(AB+BC+CA)} = \frac{3.3}{3\sqrt{2}+3+3} = \frac{6-3\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 22: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;3;1)$, $B(-1;2;0)$, $C(1;1;-2)$.

a) $\overrightarrow{AB} = (3; -1; -1)$.

b) Tọa độ trọng tâm G là $G\left(\frac{2}{3}; 2; -\frac{1}{3}\right)$.

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 8$.

d) Gọi $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Giá trị biểu thức $P = 15a + 30b + 75c$ bằng 50.

Lời giải

a) Sai:

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3; -1; -1)$.

b) Đúng:

Tọa độ trọng tâm G là $G\left(\frac{2}{3}; 2; -\frac{1}{3}\right)$.

c) Đúng:

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3; -1; -1)$ và $\overrightarrow{AC} = (-1; -2; -3)$ nên

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-3) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) + (-1) \cdot (-3) = 3 + 2 + 3 = 8.$$

d) Đúng:

Ta có $I(x; y; z)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC \Leftrightarrow AI = BI = CI, I \in (ABC)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ CI^2 = BI^2 \\ [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AI} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{14}{15} \\ y = \frac{61}{30} \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{14}{15}; \frac{61}{30}; -\frac{1}{3}\right) \Rightarrow P = 50.$$

